ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 31.01.2015.

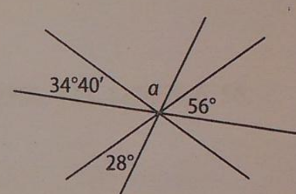
V РАЗРЕД

1. Ако је $a = 38 - 28 : 2$, $b = 48 - 16 \cdot 2$, $c = 6 + 13 \cdot 3$, израчунај вредност израза $c : 9 - (6 \cdot b) : a$.

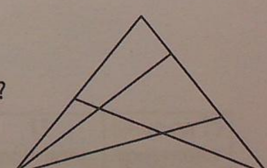
2. У пекари су, у једном тренутку, од пецива остале само переце и погачице. Ученици оближње школе купили су укупно 81 комад пецива. Ако је њих 37 купило само по перецу, а њих 36 је купило само погачицу, колико ученика је купило и перецу и погачицу?

3. Обојена дрвена коцка површине 360cm^2 подељена је (исечена) на осам једнаких коцки. Израчунај укупну површину необојених страна тих коцки.

4. Користећи слику израчунај угао α.



5. Колико се троуглова може уочити на слици?



Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА
V РАЗЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

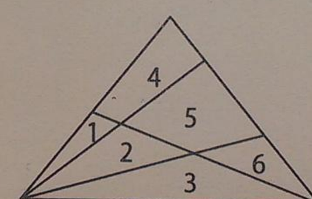
1. (МЛ 49/1) $a = 24$, $b = 16$, $c = 45$ (**10 бодова**), $c : 9 - (6 \cdot b) : a = 1$ (**10 бодова**).

2. (МЛ 49/1) $(81 - 37 - 36) : 2 = 4$. Дакле, 4 ученика (**20 бодова**).

3. (МЛ 47/5) Једна страна велике коцке има површину 60cm^2, а страна сваке од малих коцки 15cm^2 (**5 бодова**). После сечења, 8 малих коцки има 48 страна, од којих су 24 обојене, а 24 необојене. Укупна површина необојених страна коцки је $24 \cdot 15\text{cm}^2 = 360\text{cm}^2$ (**15 бодова**).

4. (МЛ 47/5) 61° 20′ (**20 бодова**).

5. 15 троуглова (1, 14, 2, 25, 3, 36, 12, 1245, 23, 2356, 123, 123456, 6, 56, 456).



Уочено троуглова	мање од 11 троуглова	од 11 до 13 троуглова	14 троуглова	15 троуглова	више од 15 троуглова
Број бодова	**0**	**5**	**10**	**20**	**10**

VI РАЗРЕД

1. Одреди x тако да буде $|x + 1| = |-2 + 3 - 4|$.

2. Број 698 подељен једним једноцифреним бројем даје остатак 5. Колики може бити остатак ако 2015 поделимо истим тим бројем?

3. Дата је дуж $AB = 30{,}12$cm. Тачке O, M и K су на тој дужи тако да је дуж AM четири пута краћа од дужи MB и $AO = KB = 20{,}14$cm. Какав је распоред тачака A, B, O, M и K и колика су растојања између суседних тачака?

4. Нацртај троугао ABC, такав да је $\measuredangle A > \measuredangle B > \measuredangle C$. Конструиши затим тачку која је на једнаком растојању од полуправих AB и AC, а такође на једнаком растојању од тачака B и C.

5. У царству бројева Неуништиви змај има 100 глава. Витез Спретнић има мач којим може да одсече змају тачно 33, 21 или 17 глава. Змај има чаробно својство да му у првом случају одмах израста 18 глава, у другом 36, а у трећем 14 глава, али под условом да му витез није одсекао све главе. Ако витез одсече све главе, онда је победио змаја. Да ли он то може да учини?

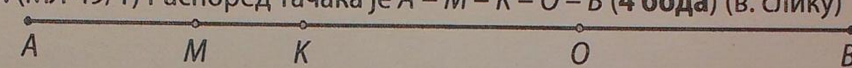
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА
VI РАЗЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 47/1) $|x + 1| = 3$, па је $x = 2$ или $x = -4$ (Једно решење **5 бодова**. Оба решења **20 бодова**).

2. (МЛ 49/1) Дати једноцифрени број (делилац) може бити 7 или 9. У првом случају остатак је 6, а у другом 8 (Једно решење **10 бодова**. Оба решења **20 бодова**).

3. (МЛ 49/1) Распоред тачака је $A - M - K - O - B$ (**4 бода**) (в. слику)



$AM = 30{,}12 : 5 = 6{,}024$cm (**4 бода**); $MK = AB - (AM + KB) = 3{,}976$cm (**4 бода**); $KO = AO - (AM + MK) = 10{,}14$cm (**4 бода**); $OB = KB - KO = 10$cm (**4 бода**).

4. Тражена тачка је пресек симетрале угла CAB и симетрале странице BC троугла (**20 бодова**).

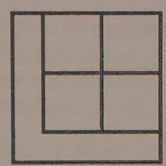
5. Број глава се у првом случају смањује за 15, у другом повећава за 15, а у трећем смањује за 3. У сваком случају, тај број се мења за умножак броја 3. Како 100 није дељиво са 3, немогуће је да витез одсече све главе змају (**20 бодова** за одговор и образложење. Само одговор **0 бодова**).

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 31.01.2015.

VII РАЗРЕД

1. Одреди најмањи природан број a тако да је број $\sqrt{1350 \cdot a}$ природан.

2. Површина великог квадрата на слици је 125cm^2. Квадрат је подељен на пет делова једнаких површина, четири квадрата и један многоугао у облику слова L. Колики је обим тог многоугла у облику слова L?



3. Тачке P, Q, R, S су редом средишта страница AB, BC, CD, DA ромба $ABCD$. Странице паралелограма $PQRS$ се односе као $3 : 4$, а површина паралелограма је 36cm^2. Израчунај површину ромба.

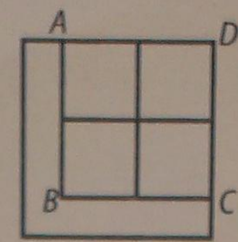
4. Кружница k је уписана кружница једнакостраничног троугла и описана кружница квадрата. Израчунај однос површина троугла и квадрата.

5. Једне године је у три узастопна месеца било укупно 12 четвртака и 12 петака. Који су то месеци били?

Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 49/1) Како је $1350 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, то је $a = 2 \cdot 3 = 6$ (**20 бодова**).

2. (МЛ 49/1) Страница великог квадрата је $5\sqrt{5}\text{cm}$. Обим многоугла у облику слова L једнак је обиму великог квадрата јер је $AB = AD$ и $BC = CD$. Дакле, обим многоугла је $20\sqrt{5}\text{cm}$ (**20 бодова**).



3. (МЛ 47/5) Странице паралелограма су паралелне дијагоналама ромба које се секу под правим углом па је $PQRS$ правоугаоник (**5 бодова**).

Прво решење. Ако су a и b странице правоугаоника $PQRS$, а d_1 и d_2 њима паралелне дијагонале датог ромба, онда је површина ромба једнака

$$\frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab = 2 \cdot 36\text{cm}^2 = 72\text{cm}^2$$ (**15 бодова**).

Друго решење. PQRS је правоугаоник површине 36cm^2, па су му странице $3\sqrt{3}\text{cm}$ и $4\sqrt{3}\text{cm}$. Оне су половине дијагонала ромба које зато износе $6\sqrt{3}\text{cm}$ и $8\sqrt{3}\text{cm}$. Површина ромба је половина производа тих дијагонала и износи 72cm^2 (**15 бодова**).

4. Ако је r полупречник кружнице k, а a страница њој описаног једнакостраничног троугла, онда је $r = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, па је $a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}$ (**5 бодова**), док је страница уписаног квадрата кружнице k једнака $b = r\sqrt{2}$ (**5 бодова**). Тражени однос површина троугла и квадрата је

$$P_1 : P_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 : b^2 = 3r^2\sqrt{3} : 2r^2 = 3\sqrt{3} : 2$$ (**10 бодова**).

5. Укупан број дана у три узастопна месеца може бити 89, 90, 91 или 92. Ако је он 91 или 92, то значи да они обухватају 13 целих седмица, те је и број четвртака и петака у њима бар 13. Ако је тај број 90, могуће је да је међу њима 12 четвртака или петака, али не обоје. Дакле, једина могућност је да та три месеца имају укупно 89 дана (**10 бодова**), а то је испуњено само у случају да су то фебруар, март и април и то просте (не преступне) године (**10 бодова**).

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 31.01.2015.

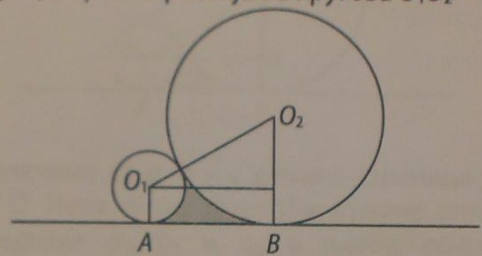
VIII РАЗРЕД

1. Одреди вредност променљиве a тако да једначине

$$a(x-1)+3=-1 \quad \text{и} \quad \frac{1-9x}{5}-2=\frac{3}{8}\cdot(1+x)$$

буду еквивалентне.

2. Кругови $K_1(O_1, 1\text{cm})$ и $K_2(O_2, 3\text{cm})$ додирују са исте стране праву p у тачкама A и B. Види слику! Израчунај обим и површину осенчене фигуре ако је централно растојање кругова $O_1O_2 = 4\text{cm}$.



3. Странице троугла ABC су 10cm, 18cm и 24cm. Обим њему сличног троугла PQR је 39cm. Одреди дужине страница троугла PQR.

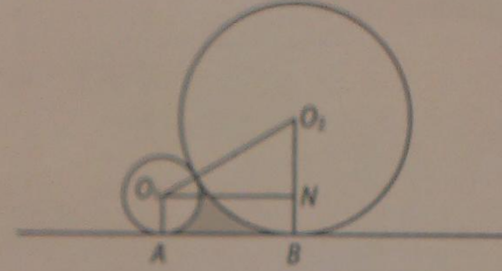
4. Кружница је уписана у једнакокраки троугао. Крак троугла је подељен тачком додира кружнице у односу 7 : 5 (гледано од врха ка основици). Одреди обим троугла ако је дужина основице 15cm.

5. Одреди прву цифру најмањег броја са збиром цифара 2015.

1. (МЛ 49/1) $x = -1$ (**10 бодова**), $a = 2$ (**10 бодова**).

2. (МЛ 48/3) Означимо са N подножје нормале из O_1 на O_2B. Тада је $O_1O_2 = 4\text{cm}$ и $O_2N = 2\text{cm}$ па је $\measuredangle O_1O_2N = 60^\circ$ и $\measuredangle O_2O_1A = 120^\circ$ (**10 бодова**). Површину осенченог дела одређујемо када од површине трапеза ABO_2O_1 одузмемо површине два кружна исечка.

$$P = 4\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2},\ P=\left(4\sqrt{3}-\frac{11\pi}{6}\right)\text{cm}^2 \ \text{(**10 бодова**)}.$$



3. (МЛ 48/4) Означимо са a, b и c дужине страница троугла ABC и његов обим са O. Нека су одговарајуће дужине страница сличног троугла PQR једнаке a_1, b_1 и c_1, а његов обим O_1. Тада је $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\frac{O}{O_1}$, па су дужине страница троугла PQR 7,5cm, 13,5cm и 18cm (**20 бодова**).

4. Крак према основици се односи као 12 : 10 (**10 бодова**), па је крак дужине 18cm, а обим троугла је 51cm (**10 бодова**).

5. Како је $2015 = 223 \cdot 9 + 8$, најмањи број са збиром цифара 2015 је $8\underbrace{99...99}_{223}$, а тражена цифра је 8 (**20 бодова**. Обавезно образложење).

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 31.01.2015.

IV РАЗРЕД

1. Прецртај дату слику на папир који ћеш предати, па затим попуни празна поља тако да збир бројева у сваком реду, колони и по дијагонали буде 675.

	225	
235		255

2. Првих 2015 природних бројева написани су редом један за другим без размака. Тако је настао број

12345....201320142015.

Колико је цифара употребљено за писање овог броја?

3. На празна места упиши цифре тако да добијеш тачне неједнакости:

__246__ > __2468 > __3577 > 74689.

4. Дужина правоугаоника је 280mm, а ширина је једна осмина дужине. Израчунај обим тог правоугаоника.

5. Одреди вредности цифара A, B, C, D тако да буде тачно следеће сабирање:

$$\begin{array}{r} A\;B\;C\;D \\ +\quad A\;B\;C \\ \hline 2\;0\;1\;5 \end{array}$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА IV РАЗЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 48/2) (**20 бодова**)

195	265	215
245	225	205
235	185	255

2. (МЛ 49/1) За записивање једноцифрених бројева употребљено је 9 цифара, двоцифрених $90 \cdot 2 = 180$, а троцифрених $900 \cdot 3 = 2700$ (**5 бодова**). Укупно је записано $2015 - 999 = 1016$ четвороцифрених бројева за чији запис је употребљено $1016 \cdot 4 = 4064$ цифара (**10 бодова**). Дакле, укупно је употребљено $9 + 180 + 2700 + 4064 = 6953$ цифара (**5 бодова**).

3. (МЛ 48/1) 92469 > 92468 > 83577 > 74689 (**20 бодова**).

4. (МЛ 48) Ширина правоугаоника је 280mm : 8 = 35mm (**10 бодова**). Обим правоугаоника је 630mm = 63cm (**10 бодова**).

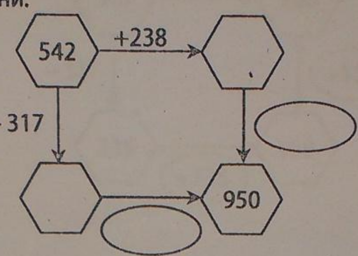
5. 1832 + 183 = 2015 (**20 бодова**).

МИНИ

ШК… …ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА – 31.01.2015.

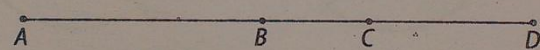
III РАЗРЕД

1. Прецртај приложену слику на папир који ћеш предати. Допуни слику бројевима и одговарајућим операцијама тако да сви добијени резултати буду тачни.



2. Нацртај два круга полупречника 35mm, па:
   а) први од њих помоћу три праве подели на пет делова;
   б) други од њих помоћу три праве подели на седам делова.

3. На правој p су тачке A, B, C и D распоређене као на слици, при чему је $AB = 36cm$, $AC = 52cm$, $BD = 40cm$. Ако је M средиште дужи AB, а N средиште дужи CD, одреди дужину дужи MN.



4. Допуни празна места тако да добијеш тачне једнакости:
   а) 958 – 145 = 1000 – ______.
   б) 437 – 20 + 43 = ______ – 342.

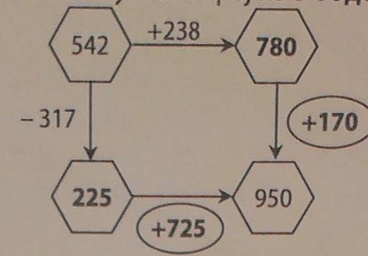
5. Премести само једно палидрвце тако да добијеш тачну једнакост.
   X I-VI == XIV
   Одреди сва решења.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

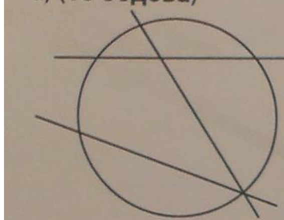
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА
III РАЗЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

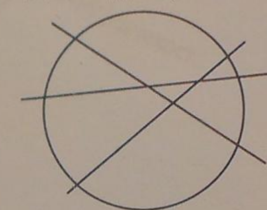
1. (МЛ 48/2) (За сваки тачно уписан број по **5 бодова**.)



2. (МЛ 48/2)
а) (**10 бодова**)



б) (**10 бодова**)



3. (МЛ 48/2) BC = AC – AB = 52cm – 36cm = 16cm (**5 бодова**), CD = BD – BC = 40cm – 16cm = 24cm (**5 бодова**), MN = MB + BC + CN = 18cm + 16cm + 12cm = 46cm (**10 бодова**).

4. (МЛ 49/1) а) 187 (**10 бодова**); б) 802 (**10 бодова**).

5. (МЛ 48/1) IX + V = XIV (**5 бодова**)
X + IV = XIV (**5 бодова**) IX + VI = XV (**5 бодова**)
X + VI = XVI (**5 бодова**)